TITLE:

函数体上のボゴモロフ予想について

AUTHOR(S):

山本, 壱彦

CITATION:
山本, 壱彦. 函数体上のボゴモロフ予想について. 代数幾何学シンポジューム記録 1999, 1999: 44-49

ISSUE DATE:
1999

URL:
http://hdl.handle.net/2433/214706

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

代数幾何学シンポジウム記録
1999年度　pp.44-49

函数体上のボゴモロフ予想について

山木　壱彦（京大理，学振）

1. はじめに

標数 $p \geq 0$ の代数閉体 k を固定して考えることとする．

まず，記号を統一しておこう．X で k 上の非特異射影曲面を，Y で k 上の非特異射影曲線を，$f : X \to Y$ で種数 $g \geq 2$ の生成的滑らかな半安定曲線を表す．Y の函数体を K で表し，C で f の生成ファイバーを表す．$\|\cdot\|_{NT}$ で $\mathrm{Pic}^0(C)(\overline{K})$ 上の標準的なネロン・テートのペアリングから生じる半ノルムを表し，$C(\overline{K})$ の $\mathrm{Pic}^0(C)(\overline{K})$ への埋め込み j を $j(x) = (2g-2)x - \omega_C$ で定義する．各 $P \in \mathrm{Pic}^0(C)(\overline{K})$ と各 $r \geq 0$ に対し，

$$B_C(P; r) := \left\{ x \in C(\overline{K}) \;\middle|\; \|j(x) - P\|_{NT} \leq r \right\}$$

と置き，さらに

$$r_C(P) := \begin{cases} -\infty & \#\big(B_C(P;0)\big) = \infty \text{ のとき,} \\ \sup\left\{ r \geq 0 \;\middle|\; \#\big(B_C(P;r)\big) < \infty \right\} & \text{それ以外,} \end{cases}$$

と置く．今回の話題は次の予想である．

予想 1 (Effective Bogomolov's conjecture). f が被覆をとっても非自明 (non-isotrivial) ならば，計算可能な正の数 r_0 が存在して

$$\inf_{P \in \mathrm{Pic}^0(C)(\overline{K})} r_C(P) \geq r_0$$

が成立する，

この予想は，$\mathrm{Pic}^0(C)(\overline{K})$ の中では，半径がある一定の値より小さな球の中には曲線上の点は有限個しか入らない，という非常に強いことを主張している．以下，この予想を E.B.C. と略記することにする．E.B.C. は次の場合には森脇により解かれている．

(a) ([2]) ($\mathrm{char}(k) \geq 0$). f の特異ファイバーが既約なとき．
(b) ([3]) ($\mathrm{char}(k) \geq 0$). $g = 2$ のとき．
(c) ([4], [5]) ($\mathrm{char}(k) = 0$). f の特異ファイバーが既約成分の樹形となっているとき．

最近，著者によって次の結果が得られた．

定理 1.1 ([8], [7]). $f : X \to Y$ は先のような半安定曲線で，Y の被覆をとっても非自明なものであると仮定する．

(1) $\mathrm{char}(k) = 0$ を仮定する．C が超楕円曲線ならば，f は特異ファイバーを持ち

$$\inf_{P \in \mathrm{Pic}^0(C)(\overline{K})} r_C(P) \geq \sqrt{r_0}$$

が成立する．ここで r_0 は次で与えられる正数である．

Date: January 1, 2000.

(a) $g=3,4$ のとき，

$$r_0 = \frac{(g-1)^2}{g(2g+1)} \cdot \left(\frac{2g-5}{12}\xi_0(X/Y) + \sum_{j=1}^{[\frac{g-1}{2}]} \frac{2j(g-1-j)-1}{2}\xi_j(X/Y) + \sum_{i=1}^{[\frac{g}{2}]} 4i(g-i)\delta_i(X/Y) \right).$$

(b) $g \geq 5$ のとき，

$$r_0 = \frac{(g-1)^2}{g(2g+1)} \cdot \left(\frac{2g-5}{12}\xi_0(X/Y) + \sum_{j=1}^{[\frac{g-1}{2}]} \frac{3j(g-1-j)-g-2}{3}\xi_j(X/Y) + \sum_{i=1}^{[\frac{g}{2}]} 4i(g-i)\delta_i(X/Y) \right).$$

(2) k の標数は任意とする．$g=3$ で f が滑らかでも超楕円的でもなければ，

$$\inf_{P \in \mathrm{Pic}^0(C)(\overline{K})} r_C(P) \geq \sqrt{\frac{2}{99}\delta_0(X/Y) + \frac{8}{3}\delta_1(X/Y)}$$

が成立する．

定理 1.1 にある $\delta_i(X/Y)$, $\xi_j(X/Y)$ について説明しよう．特異ファイバー X_y の特異点 P に対し，タイプと呼ばれる整数を次のように定義する．X_y の P での正規化 $X_{y,P}$ が連結ならば P のタイプは 0 で定義する．そうでないときには，$X_{y,P}$ の二つの連結成分の各算術種数うちの小さいほうを P のタイプと定義する．$\delta_i(X_y)$ で X_y のタイプが i の特異点の個数を表し $\delta_i(X/Y) := \sum_{y \in Y} \delta_i(X_y)$ と置く．

f が超楕円的のときには，超楕円対合 ι が特異ファイバー X_y にも作用していて，しかも $X_y/\langle\iota\rangle$ は非特異有理曲線の樹形となる．そこで，タイプ 0 の特異点に対し次のようにしてサブタイプが定義される．タイプ 0 の特異点 P が ι で固定されているときには P のサブタイプは 0 と定義する．そうでないときには，P と $\iota(P)$ で正規化した $X_{y,P,\iota(P)}$ は二つの連結成分を持つが，それらの算術種数うち，小さいほうを P のサブタイプと定義する．先程と同様に $\xi_j(X_y)$ で X_y のサブタイプが j の特異点の個数を表し $\xi_j(X/Y) := \sum_{y \in Y} \xi_j(X_y)$ と置く．

以下では，主に E.B.C. の一つの証明方針を解説し，定理 1.1 については軽く触れる程度になると思う．

2. E.B.C. へのアプローチ

この節では E.B.C. に迫るアイデアを解説する．その前にもう少し記号を用意しておこう．

$f : X \to Y$ を前節の通りとする．f の生成ファイバー上の直線束 L に対し，X 上の直線束 $\mathcal{L}$ で生成ファイバー上では L となるものを L の X におけるコンパクト化と呼ぶこととする．$\pi : Y' \to Y$ が被覆，即ち非特異射影曲線 Y' から Y への有限射であるとき，X' で $X \times_Y Y'$ の極小特異点解消を表し，$f' : X' \to Y'$ で自然に得られる射を表すこととする．なお，ここでは断りなく直線束と因子を混同し，演算は加法的に $+$ で表すこととする．

X 上の $\mathbb{R}$-直線束 $\mathcal{L}$ と $x \in C(\overline{K})$ に対し，$\mathcal{L}$ に関する x の高さを

$$h_{\mathcal{L}}(x) := \frac{(\mathcal{L} \cdot \Delta_x)}{[K(x) : K]}$$

で定義する．ここで Δ_x は x の X におけるザリスキー閉包である．この高さ函数について，次の補題が成り立つことに注意する．

補題 2.1. $\deg(\mathcal{L}|_C) > 0$ かつ $\mathcal{L}$ が f-ネフならば，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$C(\overline{K})$ の有限部分集合 S が存在して

$$\inf_{x \in C(\overline{K}) \setminus S} h_{\mathcal{L}}(x) > \frac{(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L})}{2 \deg(\mathcal{L}|_C)} - \epsilon$$

が成立する．

まず f が滑らかな場合について考えてみよう．$\mathrm{Pic}^0(C)(\overline{K})$ の二つの元 L, M をとる．すると，K の有限次拡大体 K' が存在して $L, M \in \mathrm{Pic}^0(C)(K')$ とできる．$Y' \to Y$ を K' に対応する被覆とし，$f' : X' \to Y'$ を考える．X 上での L, M のコンパクト化をそれぞれ $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ で表す．このとき，ネロン・テートのペアリングの定義より

$$(L, M)_{NT} = -\frac{1}{[K' : K]}(\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}) \tag{1}$$

である．さて，$\mathrm{Pic}^0(C)(\overline{K})$ 任意の点 P をとる．必要なら初めから十分大きな有限次拡大体をとっておくことにより，$P \in \mathrm{Pic}^0(C)(K')$ であると仮定してよい．$\mathcal{P}$ を P のコンパクト化とする．上補題を，F を f の閉ファイバーとして

$$\mathcal{L} := 2g\omega_{X'/Y'} + 2\mathcal{P} - \frac{(\omega_{X'/Y'} + \mathcal{P})^2}{2g - 2} F$$

に適用して，上の (1) 及び随伴公式を用いると次の系を得る．

系 2.2. 任意の $\epsilon > 0$ に対し，$C(\overline{K})$ の有限部分集合 S が存在して

$$\inf_{x \in C(\overline{K}) \setminus S} \|j(x) - P\|_{NT}^2 > (g-1)(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y}) - \epsilon$$

が成立する．

これから直ちに，$(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y}) > 0$ ならば

$$\inf_{P \in \mathrm{Pic}(C)(\overline{K})} r_C(P) \geq \sqrt{(g-1)(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y})}$$

が成立することがわかる．今，f は被覆を上げても非自明なので $(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y}) \geq 12$ となり、

$$\inf_{P \in \mathrm{Pic}(C)(\overline{K})} r_C(P) \geq \sqrt{12(g-1)}$$

が，つまり f が滑らかな場合について E.B.C. が得られた．

f が滑らかでない場合には，上の議論はそのままではうまくいかない．しかし，ネロン・テートのペアリングが記述できてさらに随伴公式が成り立つようなペアリングが定義できれば，滑らかな場合と同様の議論でうまくいくかもしれない．それが，次に説明する張によって定義された許容ペアリングである．そして，許容ペアリングを定義するときに中心的な役割を果たすのが特異ファイバーの双対グラフ上のグリーン函数である．次の節ではそれについて簡単に述べるが，詳しくは [2]，[9] を参照してほしい．

山木　壱彦（京大理，学振）

3. 許容ペアリングと E.B.C.

G を計量付きの連結なグラフとする．その定義については [9] に譲るが，我々の目的のためには，f の特異ファイバーの双対グラフに各特異点に対応する辺の長さが 1 となるように計量を入れたものを考えれば十分である．G のルベーグ測度を dm_G で表し，G 上の区分的滑らかな連続函数全体の集合を $F(G)$ と表す．

各 g に対し，$g'': F(G) \to \mathbb{R}$ を

$$g'': \phi \mapsto \int \phi g'' dm_G$$

で定義する．また，$P \in G$ に対し $\delta_P(g): F(G) \to \mathbb{R}$ を

$$\delta_P(g): \phi \mapsto \sum_{i=1}^{l} \lim_{x_i \to +0} g'(x_i)\phi(P)$$

で定義する．ここで，l は P から出ている枝の数，x_i は $x_i(P) = 0$ なる弧長パラメータである．さらに，ラプラス作用素 Δ を

$$\Delta(g) = -g'' - \sum_{P \in G} \delta_P(g)$$

で定義する．$\mathrm{Div}(G) := \bigoplus_{x \in G} \mathbb{R}x$ とおく．

命題 3.1 ([9])**.** $\deg(D) \neq -2$ なる任意の $D \in \mathrm{Div}(G)$ に対し，唯一の超函数 $\mu_D: F(G) \to \mathbb{R}$ と唯一の函数 $g_{\mu_D}: G \times G \to \mathbb{R}$ が存在して次の性質を持つ．

(a) $\mu_D(1) = 1$
(b) g_{μ_D} は連続かつ第一成分と第二成分の入れ換えについて対称である．
(c) 固定した各 $P \in G$ に対し，$\Delta(g_{\mu_D}(P, x)) = \delta_P - \mu_D$.
(d) 固定した各 $P \in G$ に対し，$\mu_D(g_{\mu_D}(P, x)) = 0$.
(e) $g_{\mu_D}(D, x) + g_{\mu_D}(x, x)$ は x についての函数として定数である．(それを $c(G, D)$ とおく．)

この函数 g_{μ_D} を D のグリーン函数と呼ぶ．これ使って許容ペアリングを定義しよう．$f: X \to Y$ を半安定曲線とする．G_y で特異ファイバー X_y の計量付き双対グラフを表し，I_y で X_y の全ての既約成分の集合を表す．各 $E \in I_y$ に対し，$v(E)$ で対応する G_y の点を表すこととする．$K_y := \sum_{E \in I_y} (\omega_{X/Y} \cdot E) v(E)$ とおき，g_y を K_y のグリーン函数とする．$D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X) \otimes \mathbb{R}$ に対し，許容ペアリングを次で定義する．

$$(D_1 \cdot D_2)_a := (D_1 \cdot D_2) + \sum_{y \in Y} \left(\sum_{E, E' \in I_y} (D_1 \cdot E) g_y(v(E), v(E'))(D_2 \cdot E') \right).$$

さらに，許容双対化層を $\omega^a_{X/Y} := \omega_{X/Y} - \sum_{y \in Y} c(G_y, K_y) f^{-1}(y)$ で定義する．すると，許容ペアリングと $\omega^a_{X/Y}$ は Y の被覆をとるという基底変換と整合性を持ち，次の期待された性質をもつこともわかる．

(1) $(L, M)_{NT} = -\dfrac{1}{[K' : K]} (\mathcal{L} \cdot \mathcal{M})_a$
(2) f の全ての切断 B に対し，$(\omega^a_{X/Y} + B \cdot B)_a = 0$

また，滑らかな場合と同様に，X 上の $\mathbb{R}$-直線束 $\mathcal{L}$ と $x \in C(\overline{K})$ に対し，許容ペアリングで測った $\mathcal{L}$ に関する x の高さを

$$h^a_{\mathcal{L}}(x) := \frac{(\mathcal{L} \cdot \Delta_x)_a}{[K(x) : K]}$$

で定義すると，同様に次の補題が成り立つ．

補題 3.2 ([9]). $\deg(\mathcal{L}|_C) > 0$ かつ $\mathcal{L}$ が f-ネフならば，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$C(\overline{K})$ の有限部分集合 S が存在して

$$\inf_{x \in C(\overline{K}) \setminus S} h^a_{\mathcal{L}}(x) > \frac{(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L})_a}{2 \deg(\mathcal{L}|_C)} - \epsilon$$

が成立する．

そして，上の (1)，(2) に注意すれば，同様に次が得られる．

系 3.3 ([2], [9]). 任意の $\epsilon > 0$ に対し，$C(\overline{K})$ の有限部分集合 S が存在して

$$\inf_{x \in C(\overline{K}) \setminus S} \|j(x) - P\|^2_{NT} > (g-1)(\omega^a_{X/Y} \cdot \omega^a_{X/Y})_a - \epsilon$$

が成立する．

これより $(\omega^a_{X/Y} \cdot \omega^a_{X/Y})_a > 0$ ならば

$$\inf_{P \in \mathrm{Pic}(C)(\overline{K})} r_C(P) \geq \sqrt{(g-1)(\omega^a_{X/Y} \cdot \omega^a_{X/Y})_a}$$

を得る．

ここで，(G_y, K_y) の**許容定数** を $\epsilon(G_y, K_y) := 2(2g-2)c(G_y, K_y) - g_y(K_y, K_y)$ で定義すると，

$$(\omega^a_{X/Y} \cdot \omega^a_{X/Y})_a = (\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y}) - \sum_{y \in Y} \epsilon(G_y, K_y)$$

となる．従って，$(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y})$ を下から良く評価し $\epsilon(G_y, K_y)$ を上から良く評価することができれば，E.B.C. に到達することができるであろう．実際にあらゆる偏極グラフの許容定数を計算し，かつ $(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y})$ を十分良く下から評価することは，一般には難しいが，定理 1.1 の状況下ではそれがうまくできるので，結果が得られるのである．

4. 定理 1.1 について

最後に，定理 1.1 のそれぞれに場合に，どのようにしてそれぞれ必要な量が計算されるかを簡単に述べて終わりたい．f は被覆をとっても非自明であると仮定する．

4.1. **f が超楕円曲線のとき．** k の標数は 0 であるとする．このとき，[1] によると，f が被覆をとっても非自明なので f は滑らかでなく，$(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y})$ は $\delta_i(X/Y)$，$\xi_j(X/Y)$ たちの線型結合で表すことができる．従って，問題は $\epsilon(G_y, K_y)$ を計算することである．

ι を C の超楕円対合とする．ι は f の各特異ファイバー X_y にも作用しており，$X_y/\langle\iota\rangle$ は射影曲線の樹形となっている．これに注意すると，三つ組み (G_y, K_y, ι) は，次に定義される**偏極半超楕円グラフ**になるように ι を G_y に作用させることができる．

定義 4.1. 連結なグラフ G と $D \in \mathrm{Div}(G)$ 及び G の自己同型 ι の三つ組み (G, D, ι) が次の条件をみたすときに，それは**偏極半超楕円グラフ**であると言う．

(1) $\iota^2 = \mathrm{id}_G$.
(2) $\iota(D) = D$.
(3) $G/\langle\iota\rangle$ は単連結なグラフである．

（[8] ではもっと条件の強い偏極超楕円グラフのみ定義している．）偏極半超楕円グラフの許容定数の計算は，グラフの 1 次の整係数ホモロジーの階数についての帰納法でうまくいく．そして，許容定数をうまく上から抑えられ $(\omega^a_{X/Y} \cdot \omega^a_{X/Y})_a$ を正の数で下から抑えられることがわかる ([8]).

4.2. $g = 3$ で非超楕円的のとき．各 $y \in Y$ に対し，

$$\mathrm{Ind}(f, y) := \mathrm{length}_{\mathcal{O}_{Y,y}}(\mathrm{Coker}(S^2(f_*(\omega_{X/Y})) \to f_*(\omega^{\otimes 2}_{X/Y}))_y)$$

と定義する．ここで，$S^2(f_*(\omega_{X/Y}))$ は $f_*(\omega_{X/Y})$ の 2 次対称テンソル積である．今，f は非超楕円的なのでこの定義は意味を持つ．すると，簡単な計算で次のことがわかる．

命題 4.2 ([6], [7]). 上の状況下で，

$$(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y}) = \frac{1}{3}(\delta_0(X/Y) + \delta_1(X/Y)) + \frac{4}{3}\sum_{y \in Y} \mathrm{Ind}(f, y)$$

が成立する．

従って，$\mathrm{Ind}(f, y)$ を十分良く評価してやれば良く，それは $f_*(\omega_{X/Y})_y$ の基底を適当に選んで計算される．一方，許容定数の計算については，本質的には 2 種類のグラフのそれを計算すればよいことがわかり，それは手計算で可能である．そして，実際 $(\omega^a_{X/Y} \cdot \omega^a_{X/Y})_a$ を正の数で下から抑えられることがわかる ([7]).

References

[1] M. Cornalba and J. Harris, Divisor classes associated to families of stable varieties, with application to the moduli space of curves, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 21 (1988), 455-475.
[2] A. Moriwaki, Bogomolov conjecture over function fields for stable curves with only irreducible fibers, Comp. Math., 105 (1997), 125-140.
[3] A. Moriwaki, Bogomolov conjecture for curves of genus 2 over function fields, J. Math. Kyoto. Univ., 36 (1996), 687-695.
[4] A. Moriwaki, Relative Bogomolov's inequality and the cone of positive divisors on the moduli space of stable curves, J. of AMS, 11 (1998), 569-600.
[5] A. Moriwaki, A sharp slope inequality for general stable fibrations of curves, J. reine angew. Math.,480 (1996), 177-195.
[6] M. Reid, Problems on pencils of small genus, preprint (1990).
[7] K. Yamaki, Bogomolov's conjecture for curves of genus 3 over function fields, in preparation.
[8] K. Yamaki, Bogomolov's conjecture for hyperelliptic curves over function fields, preprint (1999).
[9] S. Zhang, Admissible pairing on a curve, Invent. Math., 112 (1993), 171-193.